Data la funzione

$$g(x,y) = -\frac{x^2}{2} + xy^3 - 3y - \frac{5}{23}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ si chiede di:}$$

a) Calcolare le derivate parziali prime e seconde;
b) determinare gli eventuali punti critici o stazionari;
c) calcolare gli autovalori della matrice hessiana in questi (eventuali) punti critici o stazionari;
d) determinare gli (eventuali) punti di massimo, minimo (relativi), sella.

SOLUZIONE Si ha:

a) $g_x = -x + y^3 \quad g_y = 3xy^2 - 3 \quad g_{xx} = -1$

$g_{xy} = 3y^2 = g_{yx} \quad g_{yy} = 6xy$

b) Imponiamo l'annullamento del gradiente, ossia l'annullarsi SIMULTANEO delle due derivate g_x et g_y.
Si deve avere

$$\begin{cases} -x + y^3 = 0 \\ 3xy^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = y^3 \\ xy^2 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y^5 = 1 \\ \boxed{y = 1 \quad x = 1} \end{matrix}$$

Pertanto il punto $(1,1)$ è l'unico punto stazionario o critico della nostra funzione g.

c) La matrice Hessiana è: $H(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{bmatrix}$,

quindi $H := H(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, da cui $\det(H - \lambda I) =$

$= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(6-\lambda) - 9 = (\lambda+1)(\lambda-6) - 9 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 15$. Quindi $\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+60}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{85}}{2}$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{85}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{85}}{2}$, di segno opposto.

d) Il punto $(1,1)$ è un punto <u>sella</u>, in quanto i due autovalori della matrice hessiana sono uno positivo e l'altro negativo. Alla stessa conclusione si perviene calcolando il determinante della matrice

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$ Infatti $\det H = -6 - 9 = -15 < 0$

e quindi il punto stazionario $(1,1)$ è un punto <u>SELLA</u>.

SCHEMA MOLTO UTILE PER APPLICARE IL TEST DELL'HESSIANO CON GLI AUTOVALORI SENZA NECESSARIAMENTE RISOLVERE L'EQUAZIONE

det $(A-\lambda I)=0$

Consideriamo l'equazione di secondo grado det $(A-\lambda I)=0$. Esprimiamola in modo tale che il coefficiente di λ^2 sia positivo, senza perdita di generalità. Per esempio, se viene $-\lambda^2+5\lambda-6=0$, scriveremo l'equazione nella forma $\lambda^2-5\lambda+6=0$. E studiamo i segni dei coefficienti, nell'ordine, più precisamente da quello associato a λ^2 al termine noto, cioè da sinistra a destra.

	Esempio		
+ + +	$\lambda^2+5\lambda+6=0$	Due autovalori negativi	massimo relativo
+ - +	$\lambda^2-5\lambda+6=0$	Due autovalori positivi	minimo relativo
+ + -	$\lambda^2+5\lambda-6=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella
+ - -	$\lambda^2-5\lambda-6=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella
+ + 0	$\lambda^2+4\lambda=0$	Autovalore nullo	non si può dire nulla
+ - 0	$\lambda^2-4\lambda=0$	Autovalore nullo	non si può dire nulla
+ 0 0	$\lambda^2=0$	Due autovalori nulli	non si può dire nulla
+ 0 -	$\lambda^2-9=0$	Due autovalori "discordi"	punto sella

+ 0 + $\lambda^2+9=0$ NON PUO' MAI ACCADERE NEI NOSTRI ESERCIZI, PERCHÉ SAPPIAMO CHE GLI AUTOVALORI SONO SEMPRE REALI!!!

MOLTO IMPORTANTE: IN UNA SUCCESSIONE DI + E -, PER ESEMPIO + + - OPPURE + - + E COSÌ VIA, LE COPPIE ++ E - - SI CHIAMANO PERMANENZE, LE COPPIE + - E - + SI CHIAMANO VARIAZIONI. Si può vedere (ma NON facciamo la dimostrazione) che A OGNI VARIAZIONE CORRISPONDE UNA RADICE POSITIVA, mentre A OGNI PERMANENZA CORRISPONDE UNA RADICE NEGATIVA. Quindi, per esempio, la successione + - + è costituita dalle coppie + - e - + che sono due variazioni (quindi due radici positive), mentre la successione + + - è costituita dalle coppie + + e + - che sono rispettivamente una permanenza e una variazione (quindi una radice negativa e una positiva).

<u>ESERCIZIO</u>: Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{2/5}}\right)\right] \cdot \left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{2/25}}\right)\right] \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{n^{3/10}}\right)\right]$$

(n.b.: diamo per buono che si tratta di una serie a termini positivi)

<u>SVOLGIMENTO</u>: Tenendo conto dei limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

applichiamo il criterio del confronto asintotico, ponendo rispettivamente $x = \frac{1}{n^{2/5}}$, $x = \frac{1}{n^{2/25}}$, $x = \frac{1}{n^{3/10}}$. È lecito, perché n tende a $+\infty$, e quindi le quantità $\frac{1}{n^{2/5}}$, $\frac{1}{n^{2/25}}$, $\frac{1}{n^{3/10}}$ tendono a 0 al tendere di n a $+\infty$. Allora il termine $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{2/5}}\right)$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{2/5}}$, il termine $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{2/25}}\right)$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{2/25}}$ e il termine $\sin\left(\frac{1}{n^{3/10}}\right)$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{3/10}}$. Quindi la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/5}} \cdot \frac{1}{n^{2/25}} \cdot \frac{1}{n^{3/10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{10}}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{20}{50}+\frac{4}{50}+\frac{15}{50}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{39}{50}}}, \text{ che } \underline{\text{DIVERGE}}$$

in quanto l'esponente $\frac{39}{50} \leq 1$.

ESERCIZIO $\boxed{-6-}$

Sia α il numero delle lettere del vostro cognome e β il numero delle lettere del nome. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/6}}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{n^{\alpha/24}}\cdot\frac{2n^{\beta}+11}{5n^{\beta}+15}$$

SOLUZIONE

Applichiamo il criterio del confronto asintotico.

Poiché $\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n^{1/6}}}{\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)^2}$, segue che

$$\frac{1}{4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/6}}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)^2\right)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/6}}\right)^2}{\frac{1}{n^{2/3}}}.$$

Quindi il primo «pezzo» della serie si comporta come $\frac{1}{n^{2/3}}$. Inoltre, $1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^{\alpha/24}}}{\frac{1}{n^{\alpha/24}}}$, quindi il secondo «pezzo» si comporta come $\frac{1}{n^{\alpha/24}}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^{\beta}+11}{5n^{\beta}+15}=\frac{2}{5}$, allora il terzo «pezzo» si comporta come $\frac{2}{5}$. Pertanto, globalmente, la serie si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n^{2/3}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha/24}}$, cioè

Come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3+\alpha/24}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{16+\alpha}{24}}}$

Quindi, se $\frac{16+\alpha}{24} \leq 1$, la serie data diverge;

se $\frac{16+\alpha}{24} > 1$ la serie data converge, in virtù

delle note proprietà delle serie armoniche generalizzate.

$\frac{16+\alpha}{24} \leq 1$ equivale a dire $16+\alpha \leq 24$, cioè $\alpha \leq 8$;

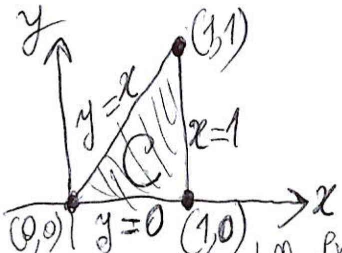
mentre $\frac{16+\alpha}{24} > 1$ se e solo se $\alpha > 8$.

ESERCIZIO (Integrale doppio con le coordinate Cartesiane)

Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_C y\cdot e^{y-x}\,dx\,dy,$$

dove C è il triangolo avente per vertici i punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$



Svolgimento: Innanzi tutto notiamo che l'equazione della retta passante per i punti $(0,0)$ ed $(1,1)$ è $\boxed{y=x}$. Infatti si vede dalla figura che è una retta obliqua del tipo $y=mx+q$, quindi con m (coefficiente angolare) reale e diverso da 0. Imponendo il passaggio per il punto $(0,0)$ si ha $0=m\cdot 0+q$, cioè $\boxed{q=0}$. Allora la nostra retta è del tipo $y=mx$. Per determinare m, imponiamo il passaggio per il punto $(1,1)$, cioè $1=m\cdot 1$, quindi $\boxed{m=1}$. Pertanto si ottiene la retta $\boxed{y=x}$. Si ha quindi

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}.$$ (dominio normale rispetto all'asse x)

Applicando la formula di riduzione, si ottiene

$$I=\int_0^1 e^{-x}\,dx\int_0^x y\,e^{y}\,dy \quad \left(\text{perché } I=\iint_C y\cdot e^{-x}\cdot e^{y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{-x}\cdot y\,e^{y}\,dy\right)$$

Si ha:

$$\int y\,e^y\,dy=\int y\,(e^y)'\,dy \overset{\text{PER PARTI}}{=} y\,e^y-\int e^y\,dy = y\,e^y-e^y+C$$

e quindi, in virtù della Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha

$$\int_0^x y\,e^y\,dy=\left[y\,e^y-e^y\right]_0^x = x\,e^x-e^x-0\cdot e^0+e^0 = x\,e^x-e^x+1.$$ Pertanto

$$I=\int_0^1 e^{-x}(x\,e^x-e^x+1)\,dx=\int_0^1 \cancel{e^{-x}}\cdot x\cdot\cancel{e^{x}}-\cancel{e^{-x}}\cdot\cancel{e^{x}}+e^{-x}\,dx=$$

$= \int_0^1 (x-1+e^{-x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - e^{-x}\right]_0^1$ (infatti una primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$, si veda anche "Applicazioni degli integrali alla Probabilità e Statistica", pag. 10) $= \frac{1}{2} - \cancel{1} - e^{-1} - \cancel{0} + \cancel{0} + \cancel{e^{0}} =$
$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}$.

Allo stesso risultato si perviene anche se si considera C come un dominio normale rispetto all'asse delle y anziché all'asse x. Si ha

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$, quindi (formula di riduzione)

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 y\, e^{y-x}\, dx = \int_0^1 dy \int_y^1 y\, e^{y} e^{-x}\, dx = \int_0^1 y\, e^{y}\, dy \int_y^1 e^{-x}\, dx.$$

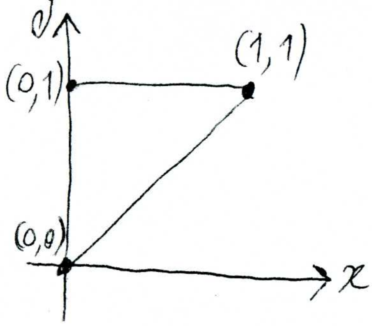
Si ha (vedi anche 1ª e 2ª riga di questa pagina): $\int_y^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_y^1 =$
$= -e^{-1} + e^{-y} = -\frac{1}{e} + e^{-y}$, e quindi

$$I = \int_0^1 y\, e^{y} \cdot \left(-\frac{1}{e} + e^{-y}\right) dy \overset{\text{linearità}}{=} -\frac{1}{e}\int_0^1 y\, e^{y}\, dy + \int_0^1 y\, \cancel{e^{y}}\, \cancel{e^{-y}}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{e}\left[y e^{y} - e^{y}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{e}\left(1 \cdot e^{1} - e^{1} - \cancel{0 \cdot e^{0}} + e^{0}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{e}\left(\cancel{e} - \cancel{e} + 1\right) + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{e} + \frac{1}{2}}$$ (vedi 4ª riga di questa pagina)

Calcolare l' integrale doppio: $I=\iint_D y\, e^{x-y}\, dx\, dy$, ove D è il triangolo avente per vertici i punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.



Si ha: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq y\}$.
Applicando più volte la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha

$$I=\int_0^1 y e^{-y}\,dy\int_0^y e^x\,dx=\int_0^1 y e^{-y}\cdot\left[e^x\right]_0^y dy=$$

$$=\int_0^1 y e^{-y}(e^y-1)\,dy=\int_0^1 y\,dy+\int_0^1 -y e^{-y}\,dy=\int_0^1 y\,dy+\int_0^1 y(e^{-y})'\,dy=$$

$$\underset{\text{PARTI}}{\overset{\text{PER}}{=}}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\left[y e^{-y}\right]_0^1-\int_0^1 e^{-y}\,dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\int_0^1 (e^{-y})'\,dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+$$

$$+\left[e^{-y}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-1=\frac{2}{e}-\frac{1}{2}=\frac{4-e}{2e}.$$

Studiare la funzione di due variabili

$$g(x,y) = 16x^3y - 2y^2 - 6x + \frac{1}{e} - \pi^2$$

Si ha: $g_x = 48x^2y - 6$, $g_y = 16x^3 - 4y$

$g_{xx} = 96xy$ $\quad g_{xy} = g_{yx} = 48x^2$ $\quad g_{yy} = -4$

I punti critici o stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 48x^2y - 6 = 0 \\ 16x^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$4x^3 - y = 0 \quad y = 4x^3 \quad \cancel{48}_{8} \cdot 4 \cdot x^5 - \cancel{6}_{1} = 0$$

$$32x^5 = 1 \qquad x^5 = \frac{1}{32} \qquad x = \frac{1}{2} \qquad y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Quindi l'unico punto stazionario è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La matrice Hessiana è $H(x,y) = \begin{bmatrix} 96xy & 48x^2 \\ 48x^2 & -4 \end{bmatrix}$

e quindi $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

$$\det\left(H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = -24 \cdot 4 - 12^2 = -96 - 144 = -240 < 0$$

e pertanto il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un punto sella.

Gli autovalori di $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sono le radici dell'equazione

$$0 = \det\left(H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \lambda I\right) = \det \begin{bmatrix} 24-\lambda & 12 \\ 12 & -4-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda - 24)(\lambda + 4) - 144 = \lambda^2 - 20\lambda - 96 - 144 = \lambda^2 - 20\lambda - 240$$

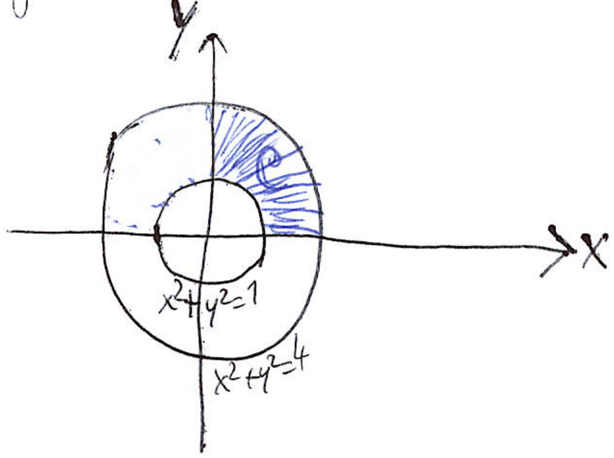
Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 10 \pm \sqrt{100 + 240} = 10 \pm \sqrt{340}$. Sono di segno discorde, e quindi anche da qui si vede che $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è punto sella.

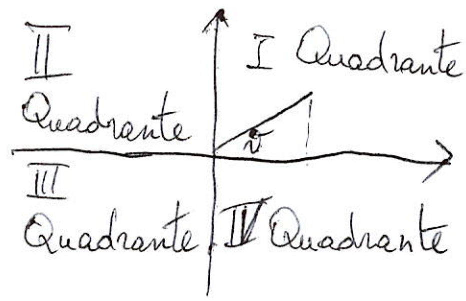
ESERCIZIO 1 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_1 = \iint_C \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,,$$

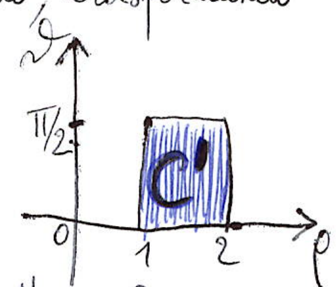
ove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

Punto 1) Disegniamo l'insieme C.





Dobbiamo innanzi tutto considerare la corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi rispettivamente 1 e 2. Inoltre, x ed y devono essere <u>tutti</u> e <u>due</u> non negativi, e quindi ci troviamo nel I° Quadrante. Al I° Quadrante corrispondono valori di ϑ compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Pertanto, trasformando C in C' mediante le coordinate polari, si ha:



Punto 2) $C' = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$, quindi C' è un dominio <u>NORMALE</u> <u>sia rispetto a ρ</u> <u>sia rispetto a ϑ.</u>

Punto 3) Calcoliamo il nostro integrale doppio, passando alle coordinate polari e moltiplicando per il fattore "magico" ρ. Si ha:

$$\boxed{I_1 =} \iint_C \frac{x\,y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \quad \left(\text{teniamo conto che } x=\rho\cos\vartheta,\ y=\rho\sin\vartheta,\ x^2+y^2=\rho^2\right)$$

$$= \iint_{C'} \frac{(\cancel{\rho}\cos\vartheta)\cdot(\cancel{\rho}\sin\vartheta)}{\cancel{\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_1^2 \rho\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot D(\sin\vartheta)\,d\vartheta = \ldots$$

(Poniamo $w = \sin\vartheta$. Poiché ϑ varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$, allora $\sin\vartheta$ va da 0 a 1. Inoltre si ha: $dw = \frac{dw}{d\vartheta}\cdot d\vartheta =$ (trucchetto) $= D(\sin\vartheta)\,d\vartheta = \cos\vartheta\,d\vartheta$, quindi, sostituendo, si ottiene:)

$$\ldots = \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot \int_0^1 w\,dw = \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \boxed{= \frac{3}{4}}.$$

[Abbiamo applicato la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale]. Allo stesso risultato $\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}$ si ottiene applicando la formula di duplicazione $\boxed{\sin(2\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta}$. Infatti si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta = \ldots$$ [Andiamo a fare una sostituzione: $v = 2\vartheta$. Dato che ϑ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, allora 2ϑ varia tra 0 e π. Inoltre $d(2\vartheta) = 2\, d\vartheta$, perché il differenziale d ha lo stesso comportamento della derivata D, e quindi $d\vartheta = \frac{d(2\vartheta)}{2}$]

$$\ldots = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2\vartheta)}{2} \cdot \frac{d(2\vartheta)}{2} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin v \, dv =$$ (Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $= \frac{1}{4}\left[-\cos v\right]_0^{\pi} =$

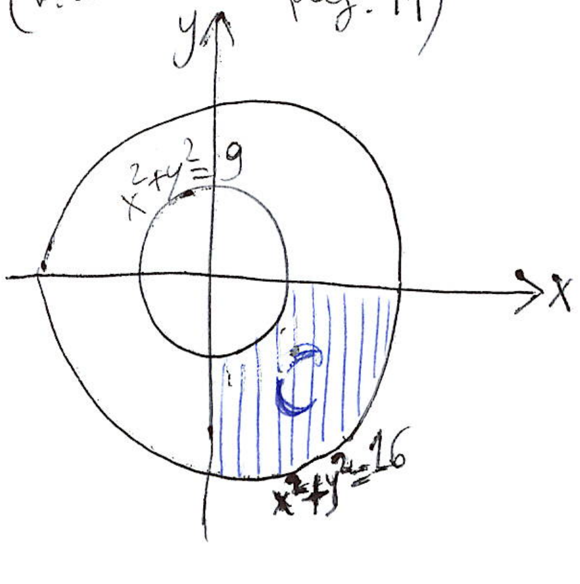
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$ come volevamo dimostrare.

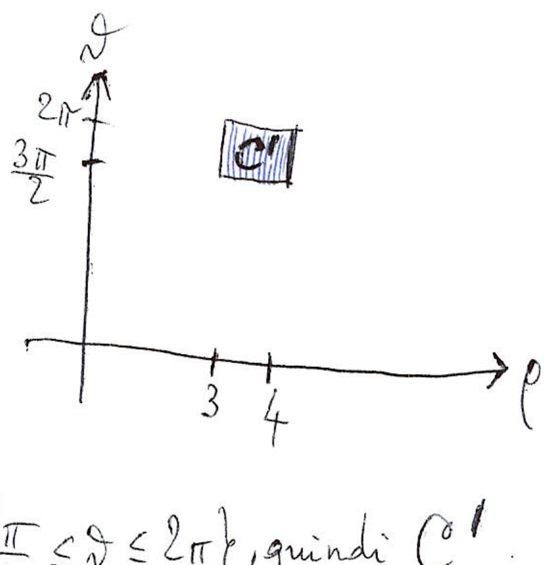
$\boxed{\text{Esercizio 2.}}$ Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I_2 = \iint_C (x+y^2)\,dx\,dy \,, \quad \text{ove}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2+y^2 \leq 16, x \geq 0, y \leq 0\}$$

1) Procedendo similmente come nell' Esercizio 1, consideriamo la corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro l' origine e di raggi rispettivamente 3 e 4. Inoltre x è nonnegativo ed y è nonpositivo: quindi ci troviamo nel 4° Quadrante. Al 4° Quadrante corrispondono valori di ϑ compresi fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Pertanto, (v. anche pag. 11) passando a coordinate polari, si ha:





2) $C' = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq \rho \leq 4, \; \frac{3\pi}{2} \leq \vartheta \leq 2\pi\}$, quindi C' è un dominio <u>NORMALE</u> <u>sia rispetto</u> a ρ <u>che rispetto a</u> ϑ.

3) Calcoliamo il nostro integrale doppio, passando alle coordinate polari e moltiplicando per il fattore "magico" ρ. Si ha, tenendo conto che $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$:

$$\boxed{I_2=}\iint_C (x+y^2)\,dx\,dy = \iint_{C'}(\rho\cos\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta)\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$=\iint_{C'}\rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta+\iint_{C'}\rho^3\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$\left[C'=\left\{(\rho,\vartheta):\ 3\le\rho\le4,\ \tfrac{3}{2}\pi\le\vartheta\le2\pi\right\}\right]$$

$$=\int_3^4\rho^2\,d\rho\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta+\int_3^4\rho^3\,d\rho\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_3^4\left[\sin\vartheta\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}+\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^4\cdot J_2\text{ , ove } J_2=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\left(\frac{64}{3}-\frac{27}{3}\right)\cdot\left(\sin2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}\right)+\left(\frac{256}{4}-\frac{81}{4}\right)\cdot J_2=$$

$$=\frac{37}{3}\cdot(\underbrace{\cancel{0-(-1)}}_{=1})+\frac{175}{4}\cdot J_2$$

Per calcolare J_2, calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $K_2 = \int \sin^2 \vartheta \, d\vartheta$.
Applichiamo la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f'(\vartheta) g(\vartheta)\, d\vartheta = f(\vartheta) g(\vartheta) - \int f(\vartheta) g'(\vartheta)\, d\vartheta}$$

Nel nostro caso, $g(\vartheta) = \sin \vartheta$, $g'(\vartheta) = \cos \vartheta$, $f'(\vartheta) = \sin \vartheta$, e quindi $f(\vartheta) = -\cos \vartheta$. Si ha:

$$\boxed{K_2} = \int \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = -\cos \vartheta \sin \vartheta - \int (-\cos \vartheta) \cdot (\cos \vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= -\cos \vartheta \sin \vartheta + \int \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \Big(\boxed{\text{TRUCCHETTO!}}$$

$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$, come visto in precedenza, e quindi

$$\boxed{\cos^2 \vartheta = 1 - \sin^2 \vartheta} \Big) = -\cos \vartheta \sin \vartheta +$$

$$+ \int (1 - \sin^2 \vartheta)\, d\vartheta = -\cos \vartheta \sin \vartheta + \int 1 \cdot d\vartheta - \int \sin^2 \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \boxed{-\cos \vartheta \sin \vartheta + \vartheta - K_2 \; (+c)}, \text{ da cui}$$

$$\boxed{2K_2 = -\cos \vartheta \sin \vartheta + \vartheta \; (+2c)}$$

(N.B.: dire $+c$ oppure $+2c$ è la stessa cosa)

Infatti una famiglia di costanti arbitrarie può essere indicata sia con c che con $2c$

Perciò $K_2 = \dfrac{-\cos \vartheta \sin \vartheta + \vartheta}{2} + c$

Calcoliamo ora l' integrale $J_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta$ (vedi p. 15)

Teniamo conto che il corrispondente integrale indefinito

$$K_2 = \int \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{-\cos\vartheta \sin\vartheta + \vartheta}{2} + c$$

Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale. Si ottiene:

$$\boxed{J_2} = \left[\frac{-\cos\vartheta \sin\vartheta + \vartheta}{2} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{-\cos(2\pi)\overset{0}{\sin(2\pi)} + 2\pi}{\cancel{2}} +$$

$$+ \frac{\overset{0}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi - \frac{3}{4}\pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Pertanto (vedi anche pag. 15) si ottiene che il nostro integrale di partenza I_2 è

$$\boxed{I_2} = \iint_C (x + y^2) \, dx \, dy = \frac{37}{3} + \frac{175}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{37}{3} + \frac{175}{16}\pi}.$$

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^n \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

N.B.: 1) Qui e nei nostri esercizi, $\log = \ln =$ logaritmo naturale, cioè in base $e \simeq 2{,}718\ldots$ $\boxed{e > 1}$ (NEPERO)

2) Diamo per buono che $\sin\frac{1}{n}$ è positivo per ogni $n \in \mathbb{N}$

3) α è un intero fissato, $\boxed{\alpha \geq 2}$

Innanzi tutto osserviamo che la serie data è a termini positivi. Infatti, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha: $\frac{1}{n} > 0$, $1 + \frac{1}{n} > 1$ e quindi $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log 1 = 0$. Inoltre, la quantità che è dentro la parentesi quadra è strettamente positiva. Infatti, poiché $\alpha \geq 2$, allora $4\alpha \geq 8 > 0$; inoltre, nel termine $(\sin x)^{2\alpha}$, l'esponente è un numero INTERO PARI, e quindi, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $(\sin x)^{2\alpha} \geq 0$; inoltre, $|x|$ è sempre ≥ 0, e quindi $\operatorname{arctg}|x| \geq 0$ (perché in generale $\operatorname{arctg} s \geq 0$ se e solo se $s \geq 0$). Allora $4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x| \geq 4\alpha + 0 + 0 \geq 8$, e quindi è > 0, ed anche > 1 (ci serve nel seguito). Quindi la serie data è a termini positivi (per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Allora, tenendo conto dei limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, applichiamo il criterio del CONFRONTO ASINTOTICO (ponendo $x = \frac{1}{n}$, si può fare perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, quindi x tende a 0) e otteniamo che la nostra serie si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^n$$, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^n \cdot \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$=$ (limiti notevoli) $1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ ($1 \neq 0$, $1 \neq \pm\infty$ e quindi effettivamente possiamo applicare il criterio del confronto asintotico).

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x|\right]^n$ è una serie geometrica di ragione $q > 1$ (infatti avevamo visto precedentemente, addirittura, che $q = 4\alpha + (\sin x)^{2\alpha} + \operatorname{arctg}|x| \geq 8$) e quindi <u>diverge</u>. Pertanto la serie data <u>diverge</u>.

ESERCIZIO -31-

Applicando il criterio del <u>confronto</u>, studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n^2}$$

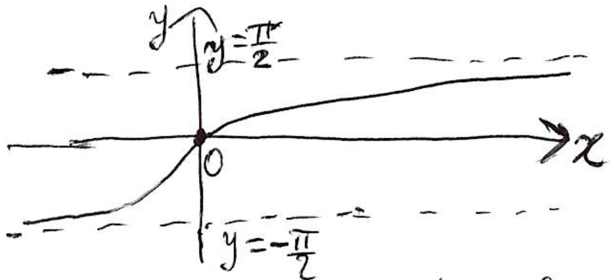
(Suggerimenti: 1) Dare per buono che la serie è a termini <u>positivi</u> 2) Pensare alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, visto che al denominatore c'è n^2 ed all'arcotangente...)

<u>Svolgimento</u> (Qui ci vuole un pò d'intuito...)

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, allora ne cerchiamo una "più piccola", in modo tale che
$$\frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n^2} \le k \cdot \frac{1}{n^2} \quad (\text{con } k>0)$$

Ma, per le proprietà della funzione arcotangente, sappiamo che $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; in particolare
$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n^2} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Quindi, ponendo $k = \frac{\pi}{2}$, siccome la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{n^2} = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



CONVERGE, allora, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n^2}$ <u>CONVERGE</u>, cioè la serie data <u>CONVERGE</u>.

ESERCIZIO

Applicando il criterio del confronto, studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n}$$

Suggerimenti: 1) Dare per buono che la serie è a termini positivi. 2) Studiare la funzione $f(x)=x^2-2x+2$ e pensare alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) (visto che al denominatore c'è n)

Svolgimento (Qui ci vuole un po' di intuito...)

[L'idea è: siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, allora ne cerchiamo una "maggiore", ~~del tipo~~ in modo tale che $\frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n} \geq k \cdot \frac{1}{n}$ (con $k>0$): allora siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{n} = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, allora – per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n}$ divergerà: il criterio del confronto richiede spesso di vedere le cose "ad occhio"]. Allora dovremo cercare $\operatorname{arctg}(n^2-2n+2) \geq$ Qualcosa. Allora come si fa? Vediamo se esiste un numero reale positivo (chiamiamolo C_0) tale che $x^2-2x+2 \geq C_0$ (ecco perché lo studio della funzione $f(x)$, di cui cercheremo minimi assoluti). Ma $f(x)=x^2-2x+2$ è una parabola che rivolge la concavità verso l'alto; allora ammetterà un punto di minimo assoluto, che corrisponde al punto dove $\boxed{f'(x)=0}$, cioè $2x-2=0$, ossia $2x=2$, vale a dire $x=1$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $x^2-2x+2 \geq 1^2-2\cdot 1+2 \; (=f(1)) = 1$, e quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arctg}(x^2-2x+2) \geq \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (la funzione arcotangente è strettamente crescente, e inoltre $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$). In particolare,

per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$\operatorname{arctg}(n^2-2n+2) \geq \operatorname{arctg} 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$, e allora

$$\frac{\operatorname{arctg}(n-2n+2)}{n} \geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{Dunque, } k = \frac{\pi}{4}}$

. Siccome la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{n} = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, allora, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2-2n+2)}{n}$ DIVERGE, cioè la serie data DIVERGE.

ESERCIZIO

Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^{1/7}}\right)\right]^2\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^{\alpha/14}}\cdot\left[\operatorname{tg}\frac{1}{n^{\beta/42}}\right]^3$$

SOLUZ: La serie data si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1/7}}\right)^2\cdot\frac{1}{n^{\alpha/14}}\cdot\frac{1}{n^{\beta/14}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/7+\alpha/14+\beta/14}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4+\alpha+\beta}{14}}}$$

converge se $4+\alpha+\beta>14$ (serie armonica generalizzata)
diverge se $4+\alpha+\beta\le 14$

Sussistono infatti i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[\log\left(1+\frac{1}{n^{1/7}}\right)\right]^2}{\frac{1}{n^{2/7}}}=1=\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^{\alpha/14}}}{\frac{1}{n^{\alpha/14}}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[\operatorname{tg}\frac{1}{n^{\beta/42}}\right]^3}{n^{\beta/14}}.$$

ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{2n^3+1}{3n^2+5} \cdot [3+\cos x]^n \quad , x \in \mathbb{R}$$

Notiamo che è una serie a termini positivi, in quanto
$3+\cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Addirittura
$3+\cos x > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$: infatti $\cos x \geq -1 > -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e quindi $3+\cos x > 3-2 = 1$).
Applicando il criterio del confronto asintotico (grazie anche ai limiti notevoli) si ha:
$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{n^3}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}$, $\frac{2n^3+1}{3n^2+5} \approx \frac{n^3}{n^2} = n$, e quindi

$$\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{2n^3+1}{3n^2+5} \approx \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{n^2} = 1$$

Pertanto la nostra serie si comporta come
$\sum_{n=1}^{\infty} (3+\cos x)^n$, serie geometrica di ragione
$q = 3+\cos x > 1$, come avevamo visto in precedenza.
Questa serie diverge, e quindi la serie data diverge.

Studiare la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/20}}\right)^4\cdot\frac{(x^4+2x^2+3)^n}{n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Innanzi tutto, osserviamo che la nostra serie è a termini positivi, e quindi si possono applicare i noti criteri studiati. Per il criterio del confronto asintotico, il primo «pezzo» (cioè $\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/20}}\right)^4$) «somiglia», al tendere di n a $+\infty$, alla quantità $\left(\frac{1}{n^{2/20}}\right)^4=\frac{1}{n^{2/5}}$, in quanto, per un ~~limite~~ notevole,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$ e quindi

$$\frac{1}{16}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^4=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/20}}\right)^4}{\left(\frac{1}{n^{1/20}}\right)^8}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/20}}\right)^4}{\frac{1}{n^{2/5}}}.$$ Quindi la nostra serie si comporta come se fosse

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/5}}\cdot\frac{(x^4+2x^2+3)^n}{n}$$

A questa serie applichiamo il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}}}_{\to 1}\cdot\frac{(x^4+2x^2+3)^{\cancel{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n}{\cancel{(x^4+2x^2+3)^{n}}}=$$

$= x^4+2x^2+3 \geqslant 3 > 1$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Perciò la serie data **diverge** $\forall x\in\mathbb{R}$ (tra l'altro, si comporta come la serie geometrica di ragione $q=x^4+2x+3>1$ $\forall x\in\mathbb{R}$).

Studiare la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4 \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Innanzi tutto, osserviamo che la serie è a termini positivi e quindi si possono applicare i noti criteri studiati. Per il criterio del confronto asintotico, il termine

$\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4$ «somiglia», al tendere di n a $+\infty$, alla quantità $\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^4 = \frac{1}{n^{2/5}}$, in quanto (limite notevole)

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^4 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4}{\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{n^{1/10}}\right)\right)^4}{\frac{1}{n^{2/5}}}.$$

Quindi la nostra serie si comporta come se fosse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/5}} \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!}$$

. A questa serie applichiamo il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(x^8+5x^6+2)^n}} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e pertanto la nostra serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti, $a_n = \frac{1}{n^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^n}{n!}$, e quindi

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{(x^8+5x^6+2)^{n+1}}{(n+1)!}$, e inoltre

$\frac{1}{a_n} = \frac{n^{2/5} \cdot n!}{(x^8+5x^6+2)^n}$. Allora $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}} =$

$$= \frac{(x^8+5x^6+2)^{n+1}}{(n+1)^{2/5} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n^{2/5} \cdot n!}{(x^8+5x^6+2)^n} \overset{\text{(proprietà delle potenze e dei fattoriali)}}{=}$$

$$= \frac{\cancel{(x^8+5x^6+2)^n} \cdot (x^8+5x^6+2) \cdot n^{2/5} \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n}}{(n+1)^{2/5} \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{(x^8+5x^6+2)^n}} =$$

$(x^8+5x^6+2) \cdot \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}} \cdot \frac{1}{n+1}$. Allora $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} =$

$$= (x^8+5x^6+2) \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/5}}{(n+1)^{2/5}}}_{=1,\text{ per il principio di sostituzione degli infiniti}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}}_{=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0} =$$

$= (x^8+5x^6+2) \cdot 1 \cdot 0 = \boxed{0}$

[N.B.: Abbiamo usato il fatto che "la costante moltiplicativa passa dentro e fuori dal segno del limite" e che "il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti".]

ESERCIZIO:

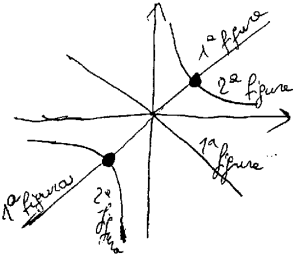
Studiamo la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 2y$$

Si ha:
$$f_x(x,y) = x^2 - y^2$$
$$f_y(x,y) = -2xy + 2$$

Cerchiamo i punti critici (o stazionari) imponendo l'annullamento del gradiente. Si ha:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 & 1^a \text{ figura} \\ \cap & \\ xy = 1 & 2^a \text{ figura} \end{cases}$$



I punti di intersezione di questo sistema sono $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Calcoliamo ora le derivate parziali seconde. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2x$$
$$f_{xy}(x,y) = -2y = f_{xy}(x,y)$$
$$f_{yy}(x,y) = -2x$$

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}$$

$$H(1,1) = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -4-4 = -8 < 0$$

$$H(-1,-1) = \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -4-4 = -8 < 0$$

Pertanto i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono punti sella (Punti né di max né di min).

Calcoliamo gli autovalori della matrice hessiana relativamente ai punti (1, 1) e (−1, −1).

$$\det\left(H_{(1,1)} - \lambda I\right) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

se e solo se $(2-\lambda)(\lambda+2)+4=0$ se e solo se

$\cancel{2\lambda}+4-\lambda^2-\cancel{2\lambda}+4=0$ se e solo se $8-\lambda^2=0$ se e solo se $\lambda^2=8$. Gli autovalori della matrice hessiana corrispondenti al punto (1, 1) sono $\lambda_1=\sqrt{8}$ et $\lambda_2=-\sqrt{8}$.

$$\det\left(H_{(-1,-1)} - \lambda I\right) = \det\begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(2+\lambda)(2-\lambda) - 4 =$$

$= (\lambda-2)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2-4-4 = \lambda^2-8$. Quindi

$\det\left(H_{(-1,-1)} - \lambda I\right) = 0$

se e solo se $\lambda^2=8$

se e solo se $\lambda=\pm\sqrt{8}$.

Pertanto anche gli autovalori della matrice hessiana corrispondenti al punto (−1, −1) sono $\lambda_1=\sqrt{8}$ et $\lambda_2=-\sqrt{8}$.

ESERCIZIO

Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^{1/3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^{3/8}}\cdot\left[\left(e^{\frac{1}{n^{1/6}}}-1\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

ESERCIZIO 44   25-4-02

Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{n^{1/3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/8}} \cdot \left[\left(e^{\frac{1}{n^{1/6}}}-1\right)\right]^{\frac{3}{4}}$$

Consideriamo i seguenti tre limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Il primo termine si comporta come

$$\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{1/3 \cdot 1/2}} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

in virtù del criterio del confronto asintotico.

Il secondo termine si comporta come $\frac{1}{n^{3/8}}$, il terzo termine si comporta come

$$\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}.$$

Quindi, messi i tre termini tutti insieme, la serie si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6+3/8+1/8}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6+1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

è una serie armonica generalizzata, con termine $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

Quindi, essendo $\frac{2}{3} < 1$, si ha che la nostra serie diverge.

ESERCIZIO $\boxed{-4-}$

Studiare, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} |x|}{x^2+13} \right)^n \cdot \frac{\left(1 - \cos \frac{1}{n^{1/10}}\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{n^{1/9}}} - 1\right)^3}$$

Soluzione: Notiamo innanzi tutto che la nostra serie è a termini positivi. Quindi possiamo applicare, innanzi tutto, il criterio del confronto asintotico. La quantità $\left(1 - \cos \frac{1}{n^{1/10}}\right)^2$ si comporta come se fosse $\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^4$, in virtù del limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, cioè come se fosse $\frac{1}{n^{2/5}}$.

La quantità $\left(e^{\frac{1}{n^{1/9}}} - 1\right)^3$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{1/3}}$, in virtù del limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Quindi il termine $\frac{\left(1 - \cos \frac{1}{n^{1/10}}\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{n^{1/9}}} - 1\right)^3}$ si comporta come se fosse $\frac{1}{n^{2/5}} : \frac{1}{n^{1/3}}$, cioè $\frac{1}{n^{2/5 - 1/3}} = \frac{1}{n^{1/15}}$.

Quindi studiare la serie di partenza è equivalente a studiare la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+13}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{1/15}}$$

che è a termini positivi e quindi può essere studiata con il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\operatorname{arctg}|x|)^{n+1}}{(x^2+13)^{n+1}} \cdot \frac{(x^2+13)^n}{(\operatorname{arctg}|x|)^n} \cdot \frac{n^{1/15}}{(n+1)^{1/15}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+13} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{15}} = \frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+13} \cdot 1^{\frac{1}{15}} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+13} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{13}$$ $\forall x$ (in quanto $x^2+13 \geq 13$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Si ha $\frac{\frac{\pi}{2}}{13} < 1$, e pertanto la nostra serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 7 LUGLIO 2003

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^4+1)} \cdot \left(\sin \frac{1}{n^{1/10}}\right)^8 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n^{1/20}}\right)^4 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{1/5}}\right)^3$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Osserviamo, innanzi tutto, che la nostra serie è a termini positivi. Infatti, il primo fattore è positivo, in quanto è un esponenziale. Si vede facilmente che anche gli altri fattori sono positivi. Pertanto è possibile applicare il criterio del confronto asintotico. In virtù dei limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

si ha che le quantità $\left(\sin \frac{1}{n^{1/10}}\right)^8$, $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{n^{1/20}}\right)^4$, $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{1/5}}\right)^3$ si comportano rispettivamente come

$$\left(\frac{1}{n^{1/10}}\right)^8 = \frac{1}{n^{8/10}} = \frac{1}{n^{4/5}}, \quad \left(\frac{1}{n^{1/20}}\right)^4 = \frac{1}{n^{4/20}} = \frac{1}{n^{1/5}}, \quad \left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)^3 = \frac{1}{n^{3/5}}$$

Quindi il prodotto $\left(\sin \frac{1}{n^{1/10}}\right)^8 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n^{1/20}}\right)^4 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^{1/5}}\right)^3$ si comporta come $\frac{1}{n^{4/5+1/5+3/5}} = \frac{1}{n^{8/5}}$. Pertanto studiare la nostra serie è equivalente a studiare la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^4+1)} \cdot \frac{1}{n^{8/5}}$ A quest'ultima serie applichiamo il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-(n+1)(x^4+1)}}{e^{-n(x^4+1)}} \cdot \frac{n^{8/5}}{(n+1)^{8/5}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{[-(n+1)+n](x^4+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{8/5} = e^{-(x^4+1)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{8/5} = e^{-(x^4+1)} \cdot 1 = e^{-(x^4+1)}.$$ Questo limite è positivo; inoltre si ha: $e^{-(x^4+1)} < 1$ se e solo se $-(x^4+1) < 0$, e questo è sempre vero. Pertanto la nostra serie risulta essere convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO -324- -1- SOLUZIONE ESERCIZI PROVA DEL 16-9-'03

Consideriamo la funzione

$$g(x,y) = 2xy + x^3 - y^3$$

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y + 3x^2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x - 3y^2$$

Calcoliamo ora le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x \,,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -6y \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2 = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

Adesso, per determinare i punti critici o stazionari di g, imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y + 3x^2 = 0 \\ 2x - 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{3}{2}y^2 \\ x^2 = \frac{9}{4}y^4 \end{matrix}$$

$$2y + \frac{27}{4}y^4 = 0 \qquad 8 + 27y^3 = 0 \text{ oppure } y = 0$$

$y = -\frac{2}{3}$ oppure $y = 0$. In corrispondenza ad $y = -\frac{2}{3}$, otteniamo il punto $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$, mentre in corrispondenza ad $y = 0$ otteniamo il punto $x = 0$. Quindi i punti stazionari (o critici) di g sono $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

L'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -6y \end{vmatrix} = -36xy - 4$

$H(0,0) = -4 < 0$ quindi l'origine è un punto sella

$H\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -36 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = 16 > 0$, mentre $g_{xx}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 > 0$

e pertanto il punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ è un punto di minimo relativo.

Alla stessa conclusione si perviene con il test dell'Hessiano <u>CON GLI AUTOVALORI</u>. Ricordiamo che la matrice Hessiana è: $\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -6y \end{bmatrix}$, i punti stazionari sono $P_1=(0,0)$, $P_2=\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, e quindi la matrice Hessiana nel punto P_1 è $\hat{H}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, mentre $\hat{H}(P_2)$ è $\begin{bmatrix} 6 \cdot \frac{2}{3} & 2 \\ 2 & (-6)\cdot(-\frac{2}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Calcoliamo ora gli autovalori di $\hat{H}(P_1)$. L'equazione $\det(\hat{H}(P_1) - \lambda I) = 0$ è:

$$\boxed{0} = \det(\hat{H}(P_1) - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \boxed{\lambda^2 - 4}$$

e quindi le radici (cioè gli autovalori) sono $+2$ e -2. Pertanto si ritrova che il punto $P_1=(0,0)$ è un punto <u>SELLA</u>.

Calcoliamo gli autovalori di $\hat{H}(P_2)$. L'equazione $\det(\hat{H}(P_2) - \lambda I) = 0$ è:

$$0 = \det(\hat{H}(P_2) - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)^2 - 4 =$$

$= \lambda^2 + 16 - 8\lambda - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 12$. I coefficienti di questo trinomio sono $+1 \quad -8 \quad +12$, quindi, nell'apposito <u>schema</u> (presente nel <u>materiale didattico del CORSO</u>), siamo nella situazione $\boxed{+ - +}$

e nel <u>programma</u> <u>del</u> <u>CORSO</u>

che presenta due "cambi" o "variazioni" del segno dei coefficienti. A ogni "cambio" o "variazione" corrisponde una radice positiva. Quindi abbiamo due radici <u>positive</u>, cioè gli autovalori sono <u>positivi</u>. Pertanto il punto $P_2 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ è un punto di <u>MINIMO</u> <u>RELATIVO</u>.

Se vogliamo calcolare <u>esplicitamente</u> gli autovalori, allora risolviamo l'equazione $\lambda^2 - 8\lambda + 12$. Si ha:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

Pertanto gli autovalori della matrice $\widehat{H}(P_2)$ sono $\boxed{6}$ e $\boxed{2}$, e quindi si ritrova il fatto che gli autovalori sono tutti e due <u>POSITIVI</u>, che implica come detto prima, in virtù del test dell'Hessiano con gli autovalori, che il punto $P_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ è di <u>minimo</u> <u>relativo</u>.

Calcolare il seguente limite

$$\hat{\ell} = \lim_{x\to 0} \frac{10e^x - 10 - 10x + 23x^2}{x^2}$$

Procediamo applicando la formula di Taylor. Siccome al denominatore c'è x^2, allora prenderemo i termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale e^x fino al "posto 2" (attenzione! si parte dal posto 0), e quindi si prende

$$(*)\quad e^x = \underset{\text{posto } 0}{1} + \underset{\text{posto } 1}{x} + \underset{\text{posto } 2}{\frac{x^2}{2}} + o(x^2),$$

dove $o(x^2)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad x^2, vale a dire

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0}.$$

Adoperando la sostituzione (*) nel nostro limite, otteniamo

$$\boxed{\hat{\ell}} = \lim_{x\to 0} \frac{10\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 10 - 10x + 23x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{10} + \cancel{10x} + 5x^2 \cancel{+ o(x^2)} - \cancel{10} - \cancel{10x} + 23x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 28\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 28 + 0 = \boxed{28}.$$

Calcolare il seguente limite

$$\tilde{\ell} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2 + 10x^4}{x^4}$$

Procediamo applicando la formula di Taylor. Siccome al denominatore c'è x^4, allora considereremo i termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione coseno fino al "posto 4" (si parte dal posto 0), e quindi si prende

$$(**) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

posto 0 | c'è 0 al posto 1 | posto 2 | c'è 0 al posto 3 | posto 4

dove $o(x^4)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x^4, cioè $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0}$. Adoperando la sostituzione $(**)$ nel nostro limite, si ha

$$\boxed{\tilde{\ell}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - x^2 + 10x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \cancel{x^2} + 10x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(10 - \frac{1}{24}\right)\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{239}{24} + 0 = \frac{239}{24}.$$

Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{240x - 240\sin x - 40x^3 + x^5}{x^5}$$

Applichiamo gli sviluppi in serie di Taylor.
Poiché al denominatore c'è x^5, allora prendiamo i termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione seno fino al "posto 5" (si parte dal posto 0), e allora si prende

$$(***)\ \sin x = \underbrace{\ }_{0 \text{ al posto } 0} \underbrace{x}_{\text{posto } 1} \underbrace{\ }_{0 \text{ al posto } 2} \underbrace{-\frac{x^3}{3!}}_{\text{posto } 3} \underbrace{\ }_{0 \text{ al posto } 4} \underbrace{+\frac{x^5}{5!}}_{\text{posto } 5} + o(x^5)$$

dove $o(x^5)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x^5, cioè $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^5} = 0}$. Adoperando la sostituzione (***) nel nostro limite, si ha

$$\boxed{L} = \lim_{x\to 0} \frac{240x - 240\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - 40x^3 + x^5}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{240x} - \cancel{240x} + \cancel{40x^3} - 2x^5 + o(x^5) \cancel{-40x^3} + x^5}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\cancel{x^5}}{\cancel{x^5}} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^5} = -1 + 0 = \boxed{-1}$$

Calcolare il seguente limite:

$$\boxed{L} = \lim_{x\to 0} \frac{12\ln(1+x) - 12x + 6x^2 - 4x^3 + 6x^4}{x^4}.$$

Applichiamo gli sviluppi in serie di Taylor. Siccome al denominatore c'è x^4, allora prendiamo i termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione $\ln(1+x)$ fino al "posto 4" (si parte dal posto 0), e allora prenderemo

$$(****)\quad \ln(1+x) \cong \underbrace{\ }_{\text{al posto 0 c'è 0}} \underbrace{x}_{\text{posto 1}} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{posto 2}} + \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\text{posto 3}} - \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{\text{posto 4}} + o(x^4)$$

(NON C'È IL FATTORIALE)

dove $o(x^4)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x^4, cioè $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0}$. Adoperando la sostituzione $(****)$ nel nostro limite, otteniamo

$$\boxed{L} = \lim_{x\to 0} \frac{12\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - 12x + 6x^2 - 4x^3 + 6x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{12x} - \cancel{6x^2} + \cancel{4x^3} - 3x^4 + o(x^4) - \cancel{12x} + \cancel{6x^2} - \cancel{4x^3} + 6x^4}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 3 + 0 = \boxed{3}.$$